

Gödel 语言的说明性语义简述

高 伟

(厦门大学 计算机科学系 福建 厦门 361005)

【摘 要】: Gödel 语言是在 Prolog 语言基础上发展而来的一种新型逻辑程序设计语言。本文基于类型一阶谓词逻辑的模型论,阐明了 Gödel 语言的说明性语义,为该语言的实现模型奠定了一定的理论基础。

【关键词】: Gödel 语言,类型,说明性语义

1、引言

Gödel 语言是继 Prolog 语言之后出现的新型说明性通用逻辑程序设计语言,它充分吸收了逻辑程序设计研究领域的最新成果,对 Prolog 语言存在的缺陷作了诸多改进,引入了类型系统,增加了新的语言成分,这些都使得 Gödel 语言成为一种功能更加强大的高效的说明性逻辑程序设计语言。本文研究该语言的说明性语义,从而为其实现模型奠定了一定的理论基础。

2、类型一阶语言

由于 Gödel 语言是带类型的基于一阶语言的逻辑程序语言,所以下面先介绍一下类型一阶语言的相关内容。

定义 1 由下面各种符号组成的集合称为类型语言的字母表:

- (1)类型 τ, σ (可带下标)。
- (2)变量 对于每个类型 τ ,存在类型为 τ 的变量 x, y, z 等(可带下标)。
- (3)常数 对于每个类型 τ ,存在类型为 τ 的常数 a, b, c 等(可带下标)。
- (4)函数符 类型为 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \rightarrow \tau$ 的函数 f, g, h 等(可带下标)。
- (5)谓词符 类型为 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ 的谓词 p, q, r 等(可带下标)。
- (6)连接词 \neg (非), \wedge (合取), \vee (析取), \leftarrow (蕴含), \leftrightarrow (等价)。
- (7)量词 对于每个类型 τ ,存在一个全称量词符号 $\forall \tau$ 和存在量词符号 $\exists \tau$ 。
- (8)分隔符 括号,逗号等。

定义 2 项归纳定义如下:

- (1)类型为 τ 的一个变量或常数是类型为 τ 的一个项;
- (2)若 f 是类型为 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \rightarrow \tau$ 的一个 n 元函数 f_i ($i = 1, \cdots, n$) 分别是类型为 τ_i 的一个项,那么 $f(t_1 \times \cdots \times t_n)$ 是类型为 τ_i 的一个项;
- (3)没有其他的项。

定义 3 类型合适公式(以下简记为 twff)归纳定义如下:

- (1)若 p 是一个类型为 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ 的谓词,则 p 是一个 twff (称为原子)。
- (2)若 F 和 G 是 twff,则 $(\neg F)$ 、 $(F \wedge G)$ 、 $(F \vee G)$ 、 $(F \leftarrow G)$ 、 $(F \rightarrow G)$ 、 $(F \leftrightarrow G)$ 也是 twff。(3)若 F 是 twff x 是一个类型的变量(在 F 中自由),那么 $(\forall x F)$ 和 $(\exists x F)$ 是 twff。
- (4)没有其他的 twff。

定义 4 不含变量的项称为基项;不含变量的原子称为基原子。

定义 5 由字母表 Σ 给出的类型一阶语言 L 是 Σ 中符号所能组成的全部 twff 的集合。

以上是类型一阶语言的完整定义,下面我们来研究类型一阶语言中对应于逻辑程序设计语言 Gödel 的那个子集。首先,我们只考虑"闭公式",即变量的出现总在某量词的辖域内。其次,我们限于考虑一类特殊的 twff,即子句。

定义 6 原子或原子的非称为句节,原子称为正句节,原子的非称为负句节。

定义 7 子句是如下形式的 twff:

$$\forall x_1, \cdots, x_n (L_1 \vee \cdots \vee L_m)$$

其中 $L_i (1 \leq i \leq m)$ 是句节 $x_j (1 \leq j \leq n)$ 是出现在 L_i 中的所有变量。

对于逻辑程序设计来说,子句的另一等价形式更为方便。设有子句:

$$\forall x_1, \cdots, x_n (A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_s)$$

其中 A_i 和 B_j 都是原子。在逻辑上它等价于

$$\forall x_1, \cdots, x_n (A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \leftarrow B_1 \vee \cdots \vee \neg B_s)$$

由于此式中所有变量都是全称量化的,蕴含词的左边的原子均参加析取,右边的均参加合取,所以可以无二义性地简写为:

$$A_1, \cdots, A_k \leftarrow B_1, \cdots, B_s$$

最后,若限制 $k \leq 1$,我们就得到类型逻辑程序设计语言——类型一阶谓词逻辑的 Horn 子集。

定义 8 Horn 子句是下列三种子句之一:

- (1) $A \leftarrow$ 称为无条件子句或单位子句;
- (2) $A \leftarrow B_1, \cdots, B_s$ 称为条件子句, A 称为头部或结论, B_1, \cdots, B_s 称为体或条件,每一个 B_i 称为一个子目标或一个条件;
- (3) $\leftarrow B_1, \cdots, B_s$ 称为目标子句,每一个 B_i 称为一个子目标。

定义 9 类型逻辑程序 P 是 (1) (2) 类 Horn 子句的有限集合。

到这里,我们已完成了对类型逻辑程序设计语言的语法定义。

3、Gödel 语言的说明性语义

下面使用一阶谓词逻辑的模型论给出类型逻辑程序的说明性语义。

定义 10 类型一阶语言 L 的一个预解释 J 由下面组成:

- (1)对每个类型 τ 有一个非空集合 D_τ , 称为类型的定义域;
- (2)对类型 τ 的每个常量,指派 D_τ 中一个元素;
- (3)对 L 中类型 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \rightarrow \tau$ 的每个 n 元函数,指派一个从 $D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_n}$ 到 D_τ 的映射。

定义 11 类型一阶语言 L 的一个解释 I 由下列 2 个项目组成:

- (1)一个 L 的预解释 J (具有 L 的论域 $\{D_\tau\}$);
- (2)对 L 中每个类型为 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ 的 n 元谓词,指派一个从 $D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_n}$ 到 $\{\text{true}, \text{false}\}$ 的映射。

定义 12 令 J 是一个类型一阶语言 L 的一个预解释,则一个变量指派(关于 J)是将每个类型为 τ 的变量分派到 J 中类型 τ 的定义域 D_τ 中一元素。

定义 13 令 J 是一个类型一阶语言 L 的一个预解释, V 是一个变量指派,则 L 中(关于 J 和 V)的项指派定义如下:

- (1)每个变量根据 V 给定它的指派。
- (2)每个常量根据 J 给定它的指派。
- (3)如果 $t'_1 \times \cdots \times t'_n$ 是 $t_1 \times \cdots \times t_n$ 的项指派, f' 是值域类型为 τ 的 n 元函数 f 的指派,那么 $f'(t'_1 \times \cdots \times t'_n)$ 是 $f(t_1 \times \cdots \times t_n)$ 的项指派。

定义 14 令 I 是类型一阶语言 L 的一个解释, V 是一个变量指派,那么 L 中的一个类型合适公式可以给定一个真值(关于 I

和 V true 或者 false 如下:

(1) 如果公式是一个原子 $p(t_1 \times \cdots \times t_n)$, 那么真值通过计算 p' ($t'_1 \times \cdots \times t'_n$) 的值获得, 其中 p' 由 I 指派 p 的映射 $t'_1 \times \cdots \times t'_n$ 是指派 $t_1 \times \cdots \times t_n$ 的项(关于 I 和 V)。

(2) 如果公式有形式 $\sim F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftarrow G, F \leftrightarrow G$, 那么公式的真值由下表给定:

F	G	$\sim F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftarrow G$	$F \leftrightarrow G$
true	true	false	true	true	true	true	true
true	false	false	false	true	false	true	false
false	true	true	false	true	true	false	false
false	false	true	false	false	true	true	true

(3) 如果公式有形式 $\forall v, F$, 那么公式的真值是 true 当存在 $d \in D$, 使得 F 关于 I 和 $V(v, d)$ 的真值为 true, 其中 $V(v, d)$ 是 V 但其中的 v 被指派了 d ; 否则, 它的真值是 false。

(4) 如果公式有形式 $\exists v, F$, 那么公式的真值是 true 当对所有的 $d \in D$, F 有关于 I 和 $V(v, d)$ 的真值 true; 否则, 它的真值是 false。

对于逻辑程序 P , 我们感兴趣的是使 P 中子句均为真的那些解释, 他们称为 P 的模型。在逻辑程序设计中, 我们要证明如果 P 中子句均为真, 则另一个子句也为真, 此时 F 称为 P 的逻辑推论。下面我们给出模型和逻辑推论的一般定义。

定义 15 设 I 是类型一阶语言 L 的一个解释, S 是 L 的一组 twff, F 是 L 的一个 twff。

若 F 在解释 I 下为真, 则称 I 是 F 的一个模型;

若 S 中所有的 twff 在 I 下均为真, 则称 I 是 S 的一个模型;

若 S 有模型, 则称为是可满足的, 否则称为是不可满足的;

若 S 的任一模型均是 F 的模型, 则称 F 是 S 的逻辑推论, 记为 $S \models F$ 。

定义 16 Gödel 程序的实现是多态多类理论, 它的语言通过程序中的所有符号的语言声明定义, 它的公理是藉应用和程序的等式理论的公理一起的程序中的所有定义的规范形式获得的完整的定义。

现在我们可以给出正确答复的关键的说明性的概念的定义。记住 (W) 指明公式 W 的全称闭包。

定义 17 令 P 为一个 Gödel 程序, G 为一个目标子句 $\leftarrow W$, θ

是 $P \cup \{G\}$ 的答复。我们说 θ 是 $P \cup \{G\}$ 的一个的正确答复, 如果 $(W\theta)$ 是 P 的实现的一个逻辑结果。

4. 小结

事实上, 关于类型逻辑, 存在一个将类型公式变换成(无类型)公式的方法, 它表明由类型逻辑所提供的附加的一般性是虚拟的。这种变换方法允许我们将类型逻辑中的定理证明归纳为(无类型)逻辑中相应定理的证明。所以我们才可以使用一阶谓词逻辑的模型论给出(无类型)逻辑程序的说明性语义那样给出类型逻辑程序的说明性语义。

虽然类型语言本质上可以规约到一类逻辑, 但是类型语言有着诸多优点。在逻辑程序设计语言中存在类型的主要原因是众所周知的——便于知识表示。预期解释在大多数逻辑程序设计应用中是被类型化的, 因此使用一个类型语言是获取应用中相关知识的最直接的方法, 编译器也可根据类型系统语言说明的信息产生效率更高的代码, 而且, 类型说明有助于捕获程序设计中的错误, 例如, 在一个无类型的语言中, 简单的打字错误经常导致奇怪的程序行为, 而这通常只在对程序艰苦的跟踪过程中才能被识别出来, 相反, 在一个类型语言中, 这样的错误只是导致简单的语法错误, 在编译阶段就被发现, 通常情况下改正编译器捕获的错误总是比发现和改正导致异常程序行为的错误更容易。我们在使用 $G\text{?del}$ 类型系统过程中所积累起来的经验支持了这样一个观点——与无类型语言相比, 有类型语言极大地减少了程序开发所付出的努力, 同时也大大地增加了程序设计的正确性。

参考文献:

1. P. M. Hill, J.W.Lloyd. The $G\text{?del}$ Programming Language [M]. MIT Press, 1994.
2. 刘椿年, 曹德和. PROLOG 语言, 它的应用与实现 [M]. 科学出版社, 1990.
3. J.W.Lloyd. Foudation of Logic Programming [M]. Springer-Verlag, 1984.
4. 徐殿祥, 郑国梁. 面向对象逻辑语言 LKO 的类型系统 [J]. 计算机研究与发展, 1998, 35(3): 246-250.
5. Herbert B. Enderton 著, 沈复兴等译. 数理逻辑 [M]. 人民邮电出版社, 2007.

(上接第 11 页)

基体上熔滴扁平过程的温度数据采集, 并经过一系列滤波处理后 $Zn-Al$ 熔滴的温度变化曲线。温度曲线是先急剧升高到峰值, 然后快速下降, 随着时间的增加, 下降速率开始慢慢减小, 最后, 温度趋近于室温。

4. 结束语

对比文献^[5]中熔滴直径约 2mm 的铅锡熔滴以 1.6~3.3m/s 的速度碰撞在冷的 (20~25℃) 平坦光滑的不锈钢基体表面, 其扁平变形发生在约 5~20ms 内。结果表明, 本系统是成功的, 能够对热喷涂中熔滴粒子温度变化进行实时测量。由于该系统具有成本低廉、操作简单、测量精度高等优点, 可广泛应用于其它快速测温的领域, 如: 发动机进口、爆发器内壁的温度采集研究。

参考文献:

1. P. Fauchais. Understanding plasma spraying [J]. J. Phys. D: Appl. Phys. 2004, 37: 86-108.
2. M. Fukumoto. Effect of surface morphology of substrate on flattening behavior of freely fallen metal droplet [C]. Proc. Int. Thermal Spray, Conf. Essen 2002, 2002: 37-41.
3. Madejski, J. Solidification of droplets on a cold surface [J]. Journal of Heat and Mass transfer, 1976, 19: 1009-1013.
4. 皮涛, 李京龙, 李长久. 低速大熔滴模拟热喷涂熔滴扁平化过程的研究 [J]. 甘肃工业大学学报, 1998, 24(4): 14-18.
5. R. Ghafouri-Azar, Z. Yang, S. Chandra, J. Mostaghimi. Impact of molten metal droplets on the tip of a pin projecting from a flat surface [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2005, 26: 334-347.
6. 周继明, 江世明. 传感技术与应用 [M]. 长沙: 中南大学出版社, 2006.